GPO PRICE $ _____

CFSTI PRICE(S) $ _____

Hard copy (HC) 3.00

Microfiche (MF) .65

ff 653 July 65

NASA TT F-10,356

THE PHENOMENA THAT OCCUR IN THE NEIGHBORHOOD OF A TIME LINE NUMBER 3

E. Fermi

Translation of "Sopra i Fenomeni che Avvengono in Vicinanza di Una Linea Oraria"
Source unknown. Reprint from Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei
31 (1), 21-23, 51, 52, 101, 103, 1922

N67 15554
(ACCESSION NUMBER)
11
(PAGES)
(NASA CR OR TMX OR AD NUMBER)
FACILITY FORM 602
(THRU)
1
(CODE)
9
(CATEGORY)

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON
OCTOBER 1966

THE PHENOMENA THAT OCCUR IN THE NEIGHBORHOOD OF A TIME LINE

E. Fermi

ABSTRACT

Geometric observations are considered to find appropriate references for the study of phenomena occurring in the neighborhood of a time line. Analytic expressions are found for the operations indicated by a Riemann manifold, and covariant and contravariant coordinates are expressed. It is stated that two contravarient components are obtained by multiplying their magnitude by the contravariant coordinates of the tangent to L. An equation is derived which gives a system of first-order differential equations for n unknown quantities. A hypothesis is formed for infinitely neighboring relationships valid in the neighborhood of L: the neighborhood of L is extended to a Euclidean space. Physical applications of the results obtained are extended to the theory of relativity, and by integrating equations the electromagnetic field is determined.

Note I

1. In order to study the phenomena that occur in the neighborhood /17* of a time line, i.e., in nonrelativistic language, in a portion of space (ultimately variable with time but always very small with regard to Euclidean divergences) of the space-time manifold, it will be necessary first to seek an appropriate reference so that, in the neighborhood of the line studied, the ds^2 of the manifold will be in a simple form. To find this reference, we must consent to some geometric considerations.

Let line L be given in a Riemann manifold V_n or in a metrically connected manifold connected in the sense Weyl means (ref. 1). Let us combine to all points P of L a direction y, perpendicular to L, with the law that direction y + dy, relative to point P + dP, is deduced from that y relative to P in the following manner: Let η be the direction tangent to L on P; y, η of P on P + dP,

*Numbers given in margin indicate pagination in original foreign text.

are transported parallel (ref. 2) and $y + \delta y$, $\eta + \delta\eta$ the directions so obtained, which because of the basic property of the parallel transport will still be orthogonal. If L is not geodetic $\eta + \delta\eta$ will not coincide with direction $\eta + d\eta$ of the tangent to L on P + dP, and these two directions will characterize a position on P + dP. Let us consider on P + dP element S_{n-2} perpendicular to that and let us rotate around S_{n-2} a surrounding particle P + dP until $\eta + \delta\eta$ does not superimpose itself on $\eta + d\eta$. Then $y + \delta y$ will end in a position which we shall take as direction $y + dy$ relative to point P + dP. It is well known that, direction y placed at will on point L, all points of L will be known through integration. /18

Let us now find analytic expressions translating the operations indicated by a Riemann manifold, which are identical to those valid for a metric manifold of Weyl, provided that there is care in selecting the standardization so that the measurement of a segment, which moves rigidly in the neighborhood of L, is constant. Let

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

and let $y_i, y^{(i)}; \eta_i, \eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ be the covariant and contravariant systems of directions y, η. But we shall have

$$\frac{\delta\eta^{(i)}}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds},$$

and furthermore, $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. The following is therefore found:

$$\frac{\delta\eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = -\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = -C^i.$$

Let C^i be the contravariant components of vector C, geodetic curvature, i.e., of a vector which has orientation of the principal geodetic norm of L and magnitude equal to its geodetic curvature.

On the other hand, we have

$$\frac{\delta y^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} hk \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}. \tag{2}$$

Or, as y is perpendicular to L, the displacement, with which from y + δy we deduce y + dy, will be parallel to the tangent at L and will have magnitude equal to the projection y of δη - dη; that is to say, as y has length I, to the scalar product of δη - dη for y, i.e., /19

$$\sum_i (\delta\eta_i - d\eta_i)\, y^{(i)} = -ds \sum_i C_i y^{(i)}.$$

The two contravariant components will be obtained therefore by multiplying their magnitude by the contravariant coordinates of the tangent to L, i.e., dx_i/ds. These are therefore, in the final analysis, $-dx_i \sum_r C_r y^{(r)}$.
Now from (2) the direct result is

$$\frac{dy^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h C_h y^h. \qquad (3)$$

Equation (3), written as i = 1, 2, ..., n, gives a system of first order differential equations between the n unknowns $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ ..., $y^{(n)}$ which will be determinates, once initial values are assigned to them. It will also be easy to verify formally from (3) that, if the initial values of $y^{(i)}$ satisfy the condition of perpendicularity to L, such a condition will be seen all along the line.

2. On point P_o of L let us now assign at will n directions y_1, y_2, ..., y_n which are mutually orthogonal, with the condition that y_n be tangent to L. The directions y_1, y_2, ..., y_{n-1} will be perpendicular to L and we shall transpose them along L with the law indicated in the preceding paragraph that, as obvious from their own structure, conserves their orthogonality. In this manner we combine to all points of L n directions which are mutually orthogonal, of which the last one is that of the tangent to L. But let us now consider our V_n in a Euclidean S_n at an appropriate number of dimensions. Let us take as coordinates of a point of V_n the orthogonal Cartesian coordinates of S_n projection tangent to V_n on a generic point P of L, having as origin P and as directions, y_1, y_2, ..., y_n relative to point P. With such coordinates the metric element of V_n on P takes the form $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2$; moreover,

as immediately seen, they are geodetic on P. That is to say, for coordinates y we can place around P infinitesimals of higher order than the first, $g_{ii} = I$; $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. It is known that we have one such reference for L. Let us now consider point Q_0 of V_n which in reference relative to point P_0 of L has coordinates $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ..., $\bar{y}_{n-1}$, 0. For every other point P of L we can then determine point Q which, in the reference relative to P, has the same coordinates that Q_0 has in the reference relative to P_0. Point Q will thus run parallel to L. We wish to find the relation that links ds_Q to ds_P in the hypothesis that Q is infinitely neighboring to P. Therefore, we observe that the displacement that Q brings to Q + dQ is composed of the displacements indicated in the first section with δ and with $d - \delta$ and that the first, being a parallel displacement, furnishes at least infinitismals of higher order, $\delta s_Q = ds_P$; the second one is a rotation that, as seen in the first section, gives $(d - \delta)s_Q = ds_P\, C\cdot(Q - P)$, if by $\cdot$ the scalar product is indicated and with $Q - P$ the vector of origin P and term Q. Furthermore, ds_Q and $(d - \delta)s_Q$ both have the direction of the tangent in L. Therefore, we have $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta)s_Q$; i.e.,

$$ds_Q = ds_P\,[I + \mathbf{C}\cdot(Q - P)]. \tag{4}$$

The trajectories of point Q form an infinity $(n - 1)$ of lines and therefore at least with appropriate limitations, this type of line will pass through every point M of V_n; and so we can characterize M through the coordinates of point Q, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ..., $\bar{y}_{n-1}$ corresponding to the line passing through M, and arc s_P of line L tangency of an arbitrary origin at the end of point P which corresponds to Q coincident with M.

If M is infinitely neighboring to L, ds_Q will be perpendicular to hypersurface s_P = constant. We therefore have

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2;$$

and, bearing in mind equation (4),

$$ds_M^2 = [I + \mathbf{C}\cdot(M - P)]^2\, ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2. \tag{5}$$

In the neighborhood of L we have found with this a simplified expression of ds^2.

Note II

3. Before considering the physical application of the results obtained, we again wish to make some geometric observations. But it is clear that the foregoing considerations (and also formula (5) which is the conclusion of this), are valid for any manifold in the neighborhood of L; they are entirely exact for Euclidean spaces. Let us then combine with line L of V_n, line L* of a Euclidean space S_n, on which we indicate with x_i^* the orthogonal Cartesian coordinates. If we indicate with asterisks the symbols referring to line L*, we shall be able to write for S_n a formula analogous to (5):

$$ds^2_{M^*} = [1 + \mathbf{C}^*\cdot(M^* - P^*)]\, ds^2_{P^*} + d\bar{y}_1^{*2} + d\bar{y}_2^{*2} + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^{*2}; \qquad (5^*)$$

C is
as in (5) a function of s_P, so in (5)* C* is a function of s_{P^*}.

Let $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n-1)}$ be the contravariant components of C relative to $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n-1}$ is $K^{(1)*}, K^{(2)*}, \ldots, K^{(n-1)*}$ and those of C*, relative to $\bar{y}^*$. Let us try to determine L* so that functions $K^{(r)*}(s_P)$ become equal to to $K^{(r)}(s_P)$. Let us begin with $s_P = s_{P^*}$, i.e., to establish between points L and those of L* a biunivocal correspondence which preserves the arcs. We observe then that $K^{(r)*}$ is the projection of C* on r direction y*. This is

$$K^{(r)*} = \sum_{i=1}^{i=n} y^*_{ir} \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n-1). \qquad (6)$$

The $K^{(r)}$ are then known functions of s_P. Condition $K^{(r)} = K^{(r)*}$ then leads to the (n - 1) equations

$$K^{(r)}(s_P) = \sum_{i=1}^{i=n} y^*_{ir} \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n-1). \qquad (7)$$

On the other hand, the (3) equations written for S_n give us n(n-1) other equations. If to these, we add another

$$ds_P^2 = dx_1^{*2} + dx_2^{*2} + \cdots + dx_n^{*2}, \tag{8}$$

we find a system of n-1 + n(n-1) + 1 = n^2 equations among the n^2 unknown quantities x_i^*, $y_{i/r}^*$ which serve to express them as functions of s_P. Thus we are able to determine the parametric equations $x_i^* = x_i^*(s_P)$ of L*. With this formula (5*) becomes identical to (5), or we have represented through applicability the neighborhoods of line L*, on the neighborhoods of L. Since L* is in a Euclidean space, we can then say that we have extended the neighborhoods of L on a Euclidean space, or to have found coordinates that are geodetic contemporaneously on all points of L.

Note III

4. To show the application of the foregoing results to the relativity theory, let us suppose that V_n is the V_4 space-time and that L is a time line in the neighborhood in which we propose to study the phenomena. Briefly, stating in formula (5) $ds_M = ds$, we find this case

$$ds^2 = [1 + \mathbf{C}\cdot(M - P)]^2 ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + d\bar{y}_3^2 .$$

To prevent the appearance of imaginaries and to ensure homogeneity, it is convenient to make the following substitution of variables:

$$s_P = vt \quad ; \quad \bar{y}_1 = ix \quad ; \quad \bar{y}_2 = iy \quad ; \quad \bar{y}_3 = iz ,$$

where **v** is a constant with the dimensions of a velocity so that t has the dimensions of a time. Thus we obtain

$$ds^2 = a\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9}$$

where

$$a = v^2 [1 + \mathbf{C}\cdot(M - P)]^2. \tag{10}$$

From here on, with the ordinary symbols of vector calculus we refer to space x,y,z. It is in this sense also that the scalar product which figures in (10) can be designated, since by C is meant the vector having as components those covariant components of the geodetic curvature of line $x = y = z = 0$, and M-P designates the vector of components x,y,z. Let us call x,y,z coordinates of space, and t a coordinate of time. For uniformity, let us write x_0, x_1, x_2, x_3 in place of t, x, y, z and let us also call g_{ik} the coefficients of the quadratic form (9).

5. Let $^{(3)}F_{ik}$ be the electromagnetic field and $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ the potential first order tensor of F_{ik} so that $F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$.[1]

Given $\varphi_0 = \varphi$, let us call u the vector of components $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. /22

Then we have the following:

$$\left.\begin{matrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{matrix}\right\} = \operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad \left.\begin{matrix} F_{23} \\ F_{31} \\ F_{12} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot} u, \; F_{ii} = 0, \; F_{ik} = -F_{ki},$$

similarly

$$\left.\begin{matrix} F^{01} \\ F^{02} \\ F^{03} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\left(-\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad , \quad \left.\begin{matrix} F^{(23)} \\ F^{(31)} \\ F^{(12)} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot} u, \; F^{(ii)} = 0, \; F^{(ik)} = -F^{(ki)}$$

and therefore

$$\frac{1}{4}\sum_{ik} F_{ik}F^{(ik)} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{rot}^2 u - \frac{1}{a}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Let $d\omega$ be the element of hypervolume of V_4. Then we have

$$d\omega = \sqrt{-\|g_{ik}\|}\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{a}\, dt\, d\tau$$

where $d\tau = dx\, dy\, dz$ and the element of volume of the space.

We also have:

$$\Sigma \varphi_i dx_i = \varphi\, dt + u \cdot dM \qquad dM = (dx, dy, dz).$$

[1] For the notations and the Hamiltonian deduction of the laws of physics, see Weyl., op. cit., pp. 186 and 208.

Apart from the action of the metric field, the variation of which is zero since we consider it derived a priori from (9), the action will take the following form:

$$W = \frac{1}{4}\int_{\omega}\sum_{ik} F_{ik}\,F^{(ik)}\,d\omega + \int de \int \sum_{i} \varphi_i\,dx_i + \int_{m} dm \int ds$$

de = element of electric charge
dm = element of mass

By introducing the notations indicated, we find

$$W = \frac{1}{2}\iint \left\{ \mathrm{rot}^2\, u - \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} \sqrt{a}\,dt\,d\tau, \qquad (11)$$
$$+ \iint (\varphi + u\cdot V_L)\,\rho\,d\tau\,dt + \iint \sqrt{a - V_M^2}\,k\,d\tau\,dt,$$

where ρ, k are, respectively, the density of electricity and the density of matter, the way that de = $\rho d\tau$, dm = $kd\tau$, V_L is the velocity of the electric charge, and V_M the velocity of mass.

The integrals of the second member can be extended to an arbitrary field τ between two times t_1 and t_2. This gives us the vinculum for which on the boundary of field τ, and for the two times t_1 and t_2, all variations are zero.

Apart from these conditions, the variations of φ and of u are completely arbitrary. Otherwise, on all variations of x,y,z, considered as coordinates of an element of charge or of mass ulterior conditions can be imposed, translating the vinculums of the particular problem being studied. Meanwhile, by writing that dW is zero for any $\delta\varphi$ variation of φ we find:

$$o = -\iint \left(\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot \delta\,\mathrm{grad}\,\varphi\,\frac{dt\,d\tau}{\sqrt{a}} + \iint \delta\varphi\,\rho\,dt\,d\tau.$$

By transforming the first integral with a suitable application of the Gauss theorem, and bearing in mind that $\delta\varphi$ is cancelled on the boundary, we find:

$$o = \iint \delta\varphi \left\{ \rho + \mathrm{div}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} dt\,d\tau$$

and as $\delta\varphi$ is arbitrary, we have the equation:

$$\rho + \operatorname{div}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} = 0. \tag{12}$$

In a similar way, by varying U, we find:

$$\rho V_L + \operatorname{rot}\left(\sqrt{a}\operatorname{rot} u\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] = 0. \tag{13}$$

These two last equations allow us to determine the electromagnetic field once the charges and their movement are assigned.

Another group of equations can be obtained by varying on W the trajectories of the charges and of the mass. Let δP_M be the variation of the trajectory of mass, and δP_L that of the charges. Let us also indicate u as a vector, function of point, and V a vector, with $(\partial u/\partial P)\,(V)$ the vector of components $\frac{\partial u_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}V_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}V_z$ and analogous ones. By writing that variations of W are zero we then find by the usual devices:

$$\begin{aligned}&\iint\left(\delta P_L \cdot \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right) + V_L \cdot \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right)\rho\, dt\, d\tau \\ &+\iint \delta P_M \cdot \left\{\frac{dt}{ds}\,\frac{\operatorname{grad} a}{2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}V_M\right)\right\} k\, dt\, d\tau = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

If the δP at one time do not depend on their values for other times, the coefficient dt must be zero in formula (14). It is found in this way:

$$\begin{aligned}&\int\left\{\delta P_L \cdot \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right] + V_L \cdot \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right\}\rho\, d\tau \\ &+\int \delta P_M \cdot \left\{\frac{1}{2}\,\frac{dt}{ds}\operatorname{grad} a + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}V_M\right)\right\} k\, d\tau\end{aligned} \tag{15}$$

which must be verified through all systems of δP satisfying the vinculums.

REFERENCES

1. Weyl. Raum, Zeit, Materie, p. 109. Berlin, Springer, 1921.

2. Levi-Civita, T. "Rend. Circ. Palermo," Vol. XLII, p. 173, 1917

3. Weyl. op. cit., pp. 186 and 208

F. C. Jones Code 641

TTF 10,756
1495-11

N° 3.

The origin of this paper is probably related to that of N° 2, although neither of the two papers contains an explicit reference to the other. It can be supposed, in fact, that Fermi, after the study of the relations between gravitational and electromagnetic fields, made in N° 2 under rather restrictive conditions, felt the opportunity of a more systematic treatment of this and other similar problems, by means of a system of space-time coordinates particularly fitted to follow the behaviour in time of phenomena happening in a small spatial region. He was so conducted to this paper, which, except in the last part, is essentially the demonstration of a theorem of absolute differential calculus. This theorem is of considerable interest for the applications, and is therefore reproduced in the most important treatises of absolute differential calculus (see e.g.: T. Levi-Civita, *Calcolo Differenziale Assoluto*, Roma 1925, p. 190; also, in English translation: *Absolute Differential Calculus*, Glasgow 1927, p. 167). Later, it has been extended by L. P. Eisenhart to a certain class of non-riemannian spaces (see L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, New York 1927) and by P. Dienes to any linearly connected space (see «Rend. Acc. Linc.», *18*, (6), p. 369 (1933)). A possible extension to Weyl's space is also suggested in Fermi's paper. For a detailed derivation and discussion see also: L. O. Raifertaigh, *Fermi Coordinates*, Proc. Roy. Irish Acad., 59 A, p. 15 (1958). Extensive use of "Fermi coordinates" is made in J. L. Synge, *Relativity, the General Theory* (Amsterdam, 1960).

do not type in

E. PERSICO

3.

SOPRA I FENOMENI CHE AVVENGONO IN VICINANZA DI UNA LINEA ORARIA

«Rend. Lincei», *31* (1), 21–23, ~~51–52, 101–103~~ (1922) (*).

Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei,

~~Vol. 31, 1922, pp. 21–23, 1922.~~

NOTA I.

1. Per fare lo studio dei fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, cioè, in linguaggio non relativistico, in una porzione di spazio, variabile eventualmente col tempo, ma sempre molto piccola in confronto alle divergenze dall'euclideità, della varietà spazio–tempo, conviene anzi tutto ricercare un opportuno riferimento tale che, in vicinanza della linea suddetta, il ds^2 della varietà prenda una forma semplice. Per trovare questo riferimento, dobbiamo premettere qualche considerazione geometrica.

Sia data in una varietà riemanniana V_n, od anche in una varietà metricamente connessa nel senso di Weyl [1], una linea L. Associamo ad ogni punto P di L una direzione y, perpendicolare ad L, con la legge che la direzione $y + dy$, relativa al punto $P + dP$, si deduca da quella y relativa

Source unknown, pp. 17–25.

(*) Presentate dal Corrispondente G. Armellini nella seduta del 22 gennaio 1922.

(1) WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, p. 109. Berlin, Springer, 1921.

a P, nel seguente modo: Sia η la direzione tangente ad L in P; si trasportino parallelamente [2] y, η da P in $P + dP$ e siano $y + \delta y$, $\eta + \delta\eta$ le direzioni così ottenute, che per le proprietà fondamentali del trasporto parallelo saranno ancora ortogonali. Se L non è geodetica $\eta + \delta\eta$ non coinciderà con la direzione $\eta + d\eta$ della tangente ad L in $P + dP$, e queste due direzioni individueranno in $P + dP$ una giacitura. Consideriamo in $P + dP$ l'elemento di S_{n-2} perpendicolare ad essa e ruotiamo rigidamente attorno a tale S_{n-2} tutta una particella circostante $P + dP$, fino a che $\eta + \delta\eta$ non vada a sovrapporsi ad $\eta + d\eta$. Allora $y + \delta y$ andrà a finire in una posizione che prenderemo come direzione $y + dy$ relativa al punto $P + dP$. Si intende bene come, fissata a piacere la direzione y in un punto di L, un processo di integrazione permetta di conoscerla per tutti i punti di L.

Cerchiamo ora le espressioni analitiche traducenti le operazioni indicate per una varietà riemanniana, che sono identiche a quelle valevoli per una varietà metrica di Weyl purché si abbia l'avvertenza di scegliere la « Eichung » in guisa che la misura di un segmento, che si muova rigidamente nelle vicinanze di L, sia costante. Sia

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

e siano y_i, $y^{(i)}$; η_i, $\eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ i sistemi co– e controvarianti delle direzioni y, η. Avremo intanto

$$\frac{\delta\eta^{(i)}}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds},$$

è inoltre $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. Si trova dunque

$$\frac{\delta\eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = -\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = -C^i.$$

Le C^i sono le componenti controvarianti del vettore **C**, curvatura geodetica, cioè di un vettore che ha l'orientazione della normale principale geodetica di L e grandezza eguale alla sua curvatura geodetica.

Si ha d'altra parte

$$(2) \qquad \frac{\delta y^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}.$$

Ora, siccome y è perpendicolare ad L, lo spostamento, con cui da $y + \delta y$ si deduce $y + dy$, sarà parallelo alla tangente ad L e avrà grandezza eguale alla proiezione sopra y stesso di $\delta\eta - d\eta$; vale a dire, siccome y ha lunghezza 1, al prodotto scalare di $\delta\eta - d\eta$ per y, cioè

$$\sum_i (\delta\eta_i - d\eta_i)\, y^{(i)} = -ds \sum_i C_i y^{(i)}.$$

(2) T. LEVI-CIVITA, « Rend. Circ. Palermo », tomo XLII, p. 173 (1917).

Le sue componenti controvarianti si otterranno dunque moltiplicando la sua grandezza per le coordinate controvarianti della tangente ad L, cioè dx_i/ds. Esse son dunque, in ultima analisi, $-dx_i \sum_r C_r y^{(r)}$. Da (2) risulta ora immediatamente

$$\frac{dy^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h C_h y^h. \tag{3}$$

La (3), scritta per $i = 1, 2, \cdots, n$, dà un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine tra le n incognite $y^{(1)} y^{(2)} \cdots y^{(n)}$ che risultano così determinate, una volta che ne siano assegnati i valori iniziali. Sarebbe anche facile verificare formalmente dalle (3) che, se i valori iniziali delle $y^{(i)}$ soddisfano la condizione di perpendicolarità ad L, tale condizione resta verificata lungo tutta la linea.

2. In un punto P_0 di L assegnamo ora a piacere n direzioni $y_1, y_2, \cdots, y_n$ mutuamente ortogonali, con la condizione che y_n sia tangente ad L. Le direzioni $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ saranno perpendicolari ad L e potremo trasportarle lungo L con la legge assegnata al paragrafo precedente che, come è evidente dalla sua stessa definizione, conserva la loro ortogonalità. In tale modo veniamo ad associare ad ogni punto di L n direzioni mutuamente ortogonali, di cui l'ultima è quella della tangente ad L. Pensiamo ora la nostra V_n immersa in un S_N euclideo a un numero conveniente di dimensioni. Possiamo prendere come coordinate di un punto di V_n le coordinate cartesiane ortogonali della sua proiezione sopra l'S_n tangente a V_n in un punto generico P di L, aventi per origine P e per direzioni le direzioni $y_1, y_2, \cdots, y_n$ relative al punto P. Con tali coordinate l'elemento metrico di V_n in P prende la forma $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$; esse inoltre, come immediatamente si riconosce, sono geodetiche in P. Vale a dire, per le coordinate y si può nell'intorno di P porre, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, $g_{ii} = 1$; $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. È manifesto che di tali riferimenti ne avremo uno per ogni punto di L. Consideriamo ora un punto Q_0 di V_n che nel riferimento relativo al punto P_0 di L abbia coordinate $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n-1}, 0$. Per ogni altro punto P di L possiamo allora determinare un punto Q che, nel riferimento relativo a P, abbia le stesse coordinate che ha Q_0 nel riferimento relativo a P_0. Il punto Q percorrerà così una linea di decorso parallelo ad L. Vogliamo ora trovare la relazione che lega ds_Q a ds_P nell'ipotesi che Q sia infinitamente prossimo a P. Perciò osserviamo che lo spostamento che porta Q in $Q + dQ$ è composto degli spostamenti indicati al § 1 con δ e con $d - \delta$ e che il primo, essendo uno spostamento parallelo, fornisce, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $\delta s_Q = ds_P$; il secondo è una rotazione che, come si è visto al § 1, dà $(d - \delta)\, s_Q = ds_P\, \mathbf{C} \cdot (Q - P)$, se con $\cdot$ si indica il simbolo del prodotto scalare e con $Q - P$ il vettore di origine P e termine Q. Inoltre ds_Q e $(d - \delta)\, s_Q$ hanno entrambi la direzione della tangente in L. Si ha dunque $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta)\, s_Q$; cioè

$$ds_Q = ds_P [1 + \mathbf{C} \cdot (Q - P)]. \tag{4}$$

Le traiettorie dei punti Q formano una $(n-1)^{upla}$ infinità di linee e quindi, almeno con opportune limitazioni, per ogni punto M di V_n passerà una di tali linee; così che potremo caratterizzare M mediante le coordinate del punto Q, $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n-1}$ corrispondenti alla linea passante per M, e l'arco s_P di linea L contato da un'origine arbitraria fino a quel punto P che corrisponde al Q coincidente con M.

Se M è infinitamente prossimo ad L, ds_Q sarà perpendicolare alla ipersuperficie $s_P =$ costante. Si avrà perciò

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2;$$

e, tenendo presente (4),

$$(5) \qquad ds_M^2 = [1 + \mathbf{C}\cdot(M-P)]^2 ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2.$$

Nelle vicinanze di L abbiamo con ciò trovata una espressione semplicissima del ds^2.

NOTA II.

3. Prima di passare all'applicazione fisica dei risultati ottenuti, vogliamo ancora fare qualche osservazione geometrica. È evidente intanto che le considerazioni precedenti, e quindi anche la formula (5) che ne è la conclusione, che per varietà qualunque sono valide solo vicino ad L, sono invece completamente rigorose per spazî euclidei. Associamo allora alla linea L della V_n una linea L* di uno spazio euclideo S_n, in cui indichiamo con x_i^* le coordinate cartesiane ortogonali. Se con degli asterischi indichiamo i simboli riferentisi alla linea L*, potremo scrivere per S_n la formula analoga a (5):

$$(5^*) \qquad ds_{M^*}^2 = [1 + \mathbf{C}^*\cdot(M^*-P^*)]\, ds_{P^*}^2 + d\bar{y}_1^{*2} + d\bar{y}_2^{*2} + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^{*2};$$

come nella (5) **C** è funzione di s_P, così nella $(5)^*$ $\mathbf{C}^*$ è funzione di s_{P^*}.

Siano $K^{(1)}, K^{(2)}, \cdots, K^{(n-1)}$ le componenti controvarianti di **C** relative a $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n-1}$ e $K^{(1)^*}, K^{(2)^*}, \cdots, K^{(n-1)^*}$ quelle di $\mathbf{C}^*$ relative alle $\bar{y}^*$. Cerchiamo se si possa determinare L* in modo che le funzioni $K^{(r)^*}(s_P)$ diventino eguali alle $K^{(r)}(s_P)$. Cominceremo perciò a porre $s_P = s_{P^*}$, cioè a stabilire tra i punti di L e quelli di L* una corrispondenza biunivoca che conserva gli archi. Osserviamo poi che $K^{(r)^*}$ è la proiezione di $\mathbf{C}^*$ sulla r^{esima} direzione y^*. È cioè

$$(6) \qquad K^{(r)^*} = \sum_{i=1}^{i=n} y_{i|r}^* \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Le $K^{(r)}$ sono poi funzioni note di s_P. La condizione $K^{(r)} = K^{(r)^*}$ conduce dunque alle $(n-1)$ equazioni

$$(7) \qquad K^{(r)}(s_P) = \sum_{i=1}^{i=n} y_{i|r}^* \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n-1).$$

D'altra parte le (3), scritte per l'S_n, ci dànno $n(n-1)$ altre equazioni. Se a queste aggiungiamo l'altra

$$ds_P^2 = dx_1^{*2} + dx_2^{*2} + \cdots + dx_n^{*2}, \tag{8}$$

troviamo un sistema di $n - 1 + n(n-1) + 1 = n^2$ equazioni tra le n^2 incognite x_i^*, $y_{i|r}^*$ che servono ad esprimerle in funzione di s_P. Possiamo così determinare le equazioni parametriche $x_i^* = x_i^*(s_P)$ della L*. Con ciò la formula (5*) diventa identica alla (5), ossia abbiamo rappresentato per applicabilità i dintorni della linea L*, sui dintorni di L. Siccome poi L* è in uno spazio euclideo, possiamo dire anche di aver disteso i dintorni di L in uno spazio euclideo, ossia di aver trovato coordinate che sono geodetiche contemporaneamente in tutti i punti di L.

NOTA III.

§ 4. Per mostrare l'applicazione dei risultati precedenti alla teoria della relatività, supporremo che V_n sia la V_4 spazio-tempo e che L sia una linea oraria, in vicinanza della quale ci proponiamo di studiare i fenomeni. Ponendo per brevità in (5) $ds_M = ds$, si trova in questo caso:

$$ds^2 = [1 + \mathbf{C}\cdot(\mathrm{M} - \mathrm{P})]^2 ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + d\bar{y}_3^2.$$

Per evitare la comparsa di immaginarii e ristabilire l'omogeneità, conviene fare la seguente sostituzione di variabili:

$$s_P = vt \quad ; \quad \bar{y}_1 = ix \quad ; \quad \bar{y}_2 = iy \quad ; \quad \bar{y}_3 = iz \ ,$$

essendo v una costante con le dimensioni di una velocità, per modo che t abbia le dimensioni di un tempo. Si ottiene, così,

$$ds^2 = a\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9}$$

dove

$$a = v^2[1 + \mathbf{C}\cdot(\mathrm{M} - \mathrm{P})]^2. \tag{10}$$

Da ora in avanti, con gli ordinarii simboli del calcolo vettoriale intenderemo riferirci allo spazio x, y, z. Ed è in questo senso che si può intendere il prodotto scalare che figura in (10), purché per **C** si intenda il vettore avente per componenti le componenti covarianti della curvatura geodetica della linea $x = y = z = 0$ e con M – P il vettore di componenti x, y, z. Chiameremo x, y, z coordinate di spazio e t tempo. Per uniformità scriveremo talvolta x_0, x_1, x_2, x_3 al posto di t, x, y, z e chiameremo anche g_{ik} i coefficienti della forma quadratica (9).

§ 5. Sia[3] F_{ik} il campo elettromagnetico e $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ il tensore di primo ordine « potenziale » di F_{ik}, in modo che sia $F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$.

(3) Per le notazioni e per la deduzione Hamiltoniana delle leggi della fisica, vedi WEYL., op. cit., pp. 186 e 208.

Poniamo $\varphi_0 = \varphi$ e chiamiamo u il vettore di componenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Si avrà intanto:

$$\left.\begin{matrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{matrix}\right\} = \operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad \left.\begin{matrix} F_{23} \\ F_{31} \\ F_{12} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot} u \,, \; F_{ii} = 0 \,, \; F_{ik} = -F_{ki} \,,$$

parimenti

$$\left.\begin{matrix} F^{01} \\ F^{02} \\ F^{03} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\left(-\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad , \quad \left.\begin{matrix} F^{(23)} \\ F^{(31)} \\ F^{(12)} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot} u \,, \; F^{(ii)} = 0 \,, \; F^{(ik)} = -F^{(ki)}$$

e quindi

$$\frac{1}{4}\sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} = \frac{1}{2}\left\{ \operatorname{rot}^2 u - \frac{1}{a}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\}.$$

Sia $d\omega$ l'elemento di ipervolume di V_4. Avremo

$$d\omega = \sqrt{-\|g_{ik}\|}\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{a}\, dt\, d\tau$$

dove $d\tau = dx\, dy\, dz$ è l'elemento di volume dello spazio.

Si ha anche:

$$\Sigma \varphi_i dx_i = \varphi\, dt + u \cdot dM \qquad dM = (dx, dy, dz).$$

Prescindendo dall'azione del campo metrico, la cui variazione è nulla perché lo riguardiamo come dato *a priori* dalla (9), l'azione prenderà la seguente forma:

$$W = \frac{1}{4}\int_\omega \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)}\, d\omega + \int_e de \int \sum_i \varphi_i dx_i + \int_m dm \int ds$$

$$\begin{pmatrix} de = \text{elemento di carica elettrica} \\ dm = \text{elemento di massa} \end{pmatrix}.$$

Introducendo le notazioni indicate, si trova

$$(11) \qquad W = \frac{1}{2}\iint \left\{ \operatorname{rot}^2 u - \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} \sqrt{a}\, dt\, d\tau$$

$$+ \iint (\varphi + u \cdot V_L)\, \rho\, d\tau\, dt + \iint \sqrt{a - V_M^2}\, k\, d\tau\, dt,$$

dove ρ, k sono rispettivamente le densità di elettricità e di materia, per modo che $de = \rho\, d\tau$, $dm = k\, d\tau$, V_L è la velocità delle cariche elettriche, V_M quella delle masse.

Gli integrali del secondo membro possono estendersi ad un campo arbitrario τ tra due tempi qualunque t_1, t_2. Si ha poi il vincolo che sul contorno del campo τ, e per i due tempi t_1, t_2, siano nulle tutte le variazioni.

All'infuori di queste condizioni, le variazioni di φ e di u sono completamente arbitrarie. Per contro, alle variazioni di x, y, z, considerate come coordinate di un elemento di carica o di massa, possono essere imposte ulte-

riori condizioni, traducenti i vincoli del particolare problema che si sta studiando. Scrivendo intanto che è nullo dW per una variazione qualunque $\delta\varphi$ di φ, si trova

$$0 = -\iint \left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot \delta \operatorname{grad}\varphi \frac{dt\,d\tau}{\sqrt{a}} + \iint \delta\varphi\,\rho\,dt\,d\tau.$$

Trasformando il primo integrale con opportuna applicazione del teorema di Gauss, e tenendo presente che $\delta\varphi$ si annulla sul contorno, troviamo

$$0 = \iint \delta\varphi \left\{ \rho + \operatorname{div}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} dt\,d\tau$$

e, siccome $\delta\varphi$ è arbitrario, abbiamo intanto l'equazione

$$\rho + \operatorname{div}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} = 0. \tag{12}$$

In modo analogo, facendo variare u, si trova

$$\rho V_L + \operatorname{rot}(\sqrt{a}\operatorname{rot} u) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] = 0. \tag{13}$$

Queste due ultime equazioni permettono di determinare il campo elettro-magnetico, una volta assegnate le cariche ed il loro movimento.

Un altro gruppo di equazioni si può ottenere facendo variare in W le traiettorie delle cariche e delle masse. Siano δP_M la variazione della traiettoria delle masse, δP_L quella delle cariche. Indichiamo inoltre, essendo u un vettore funzione di punto e V un vettore, con $(\partial u/\partial P)(V)$ il vettore di componenti $\frac{\partial u_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}V_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}V_z$ ed analoghe. Scrivendo che è nulla la variazione di W, si trova allora, coi soliti artifici:

$$\iint \left(\delta P_L \cdot \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right) + V_L \cdot \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right)\rho\,dt\,d\tau$$

$$+ \iint \delta P_M \cdot \left\{\frac{dt}{ds}\,\frac{\operatorname{grad} a}{2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}V_M\right)\right\} k\,dt\,d\tau = 0. \tag{14}$$

Se i δP ad un tempo non dipendono dai loro valori per altri tempi, dovrà essere nullo in (14) il coefficiente di dt. Si trova così:

$$\int \left\{\delta P_L \cdot \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right] + V_L \cdot \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right\}\rho\,d\tau$$

$$+ \int \delta P_M \cdot \left\{\frac{1}{2}\,\frac{dt}{ds}\operatorname{grad} a + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}V_M\right)\right\} k\,d\tau \tag{15}$$

che deve essere verificata per tutti i sistemi di δP soddisfacenti ai vincoli.